KIỂU ĐẶT ẨN PHỤ CỦA VŨ HỒNG PHONG

Tác giả:Vũ Hồng Phong GVTHPT TIÊN DU 1;BẮC NINH
(2-8-2016)

(đây là một dạng trong tài liệu:
MỘT HƯỚNG MỚI TẠO RA PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ)
Từ bài viết của tác giả:

DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI
MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ ĐẶC BIỆT

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (tháng 9 năm 2015)

Khi gặp một phương trình có dạng $u.\sqrt[m]{P}+v.\sqrt[n]{Q}=w$
(với u,v, w,P,Q là các biểu thức chứa ẩn) mà ta nhẩm được các hằng số e,f và các biểu thức P_0, Q_0 chứa ẩn thoả mãn:

$$\begin{cases} u.P_0+v.Q_0=w \\ e.(P_0)^m+f.(Q_0)^n=e.P+f.Q \end{cases} (*)$$

thì ta xử lí phương trình đó như sau:
Đặt $\sqrt[m]{P}=a$; $\sqrt[n]{Q}=b$ suy ra $a^m=P$; $b^n=Q$

Ta có hệ PT: $\begin{cases} u.a+v.b=w \\ e.a^m+f.b^n=e.P+f.Q \end{cases} (**)$

Giải hệ PT(**) ta tìm được các nghiệm (a;b)
Đến đây PT,hệ PT đã cho sẽ trở nên đơn giản hơn !
Lưu ý: từ (*) ta thấy hệ PT(**) luôn có nghiệm (a,b) = $(P_0;Q_0)$
Sau đây là các ví dụ
Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\sqrt{2+4x-x^2}+\sqrt[3]{2x^2-6x+7}=x+1$$

Phân tích:

Ta có: $\begin{cases} x-1+2=x+1 \\ (x-1)^2+2^3=(2+4x-x^2)+(2x^2-6x+7) \end{cases}$

nên PT này ta nhẩm được e =f =1 và $(P_0;Q_0)$= $(x-1;2)$

Lời giải

Đặt $\sqrt{2+4x-x^2}=a$; $\sqrt[3]{2x^2-6x+7}=b$
Suy ra $a^2+b^3=x^2-2x+9\,(1)$
Từ PT đã cho ta có $a+b=x+1 \Rightarrow a=x+1-b\,(2)$
Thay vào (1) ta được:

$$(x+1-b)^2+b^3=x^2-2x+9$$
$$\Leftrightarrow x^2+1+b^2+2x-2b-2bx+b^3=x^2-2x+9$$
$$\Leftrightarrow b^3-8+b^2-2b-2bx+4x=0$$
$$\Leftrightarrow (b-2)(b^2+3b+4-2x)=0$$

$\Leftrightarrow b=2$ hoặc $b^2+3b+4=2x$ (3)

+Từ (2) có $x=a+b-1$ thay vào PT(3) đ□ợc

$b^2+3b+4=2(a+b-1)\Leftrightarrow b^2+b+6=2a$ (4)

Có $VT(4)=(b+\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}>5$

$VP(4)=2\sqrt{2+4x-x^2}=2\sqrt{6-(x-2)^2}\le 2\sqrt{6}<5$

Suy ra PT(4) vô nghiệm. Do đó PT(3) vô nghiệm

+Với b = 2 thay vào (2) đ□ợc $a=x-1$

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{2+4x-x^2}=x-1\\ \sqrt[3]{2x^2-6x+7}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 2+4x-x^2=(x-1)^2\\ 2x^2-6x+7=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{11}}{2}$

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{11}}{2}$

Ví dụ 2: Giải ph□ơng trình

$$\sqrt{7x^2+20x-86}+x.\sqrt{31-4x-x^2}=3x+2$$

Phân tích: Với PT này ta nhẩm đ□ợc e=1; f=3 và $(P_0;Q_0)=(2x+2;1)$

vì $\begin{cases}2x+2+x.1=3x+2\\ (2x+2)^2+3.1^2=(7x^2+20x-86)+3.(31-4x-x^2)\end{cases}$

Lời giải Đặt a = $\sqrt{7x^2+20x-86}$, b = $\sqrt{31-4x-x^2}$

Suy ra $a^2+3b^2=4x^2+8x+7$ **(1)**

Từ PT đã cho có: a +xb = 2x + 3 $\Rightarrow$ a = 3x + 2 — bx

Thay vào (1) ta đ□ợc

$(3x+2-bx)^2+3b^2=4x^2+8x+7$

$\Leftrightarrow 9x^2+4+b^2x^2+12x-4bx-6bx^2+3b^2=4x^2+8x+7$

$\Leftrightarrow (x^2+3)b^2-(6x^2+4x)b+5x^2+4x-3=0$

$\Leftrightarrow (b-1)[(x^2+3)b-5x^2-4x+3]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=\frac{5x^2+4x-3}{x^2+3}\end{array}\right.$

+Với b = 1 thì a = 2x+2, khi đó có hệ

$\begin{cases}\sqrt{7x^2+20x-86}=2x+2\\ \sqrt{31-4x-x^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\ge 0\\ 7x^2+20x-86=(2x+2)^2\\ 31-4x-x^2=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 3x^2+12x-90=0\\ -x^2-4x+30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x=-2\pm\sqrt{34}\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{34}$

+Với b = $\frac{5x^2+4x-3}{x^2+3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{16-(x^2+4x-15)}=4+\frac{x^2+4x-15}{x^2+3}$ (2)

+ Nếu $x^2+4x-15>0$ thì VT(2) < 4 < VP(2)

+ Nếu $x^2+4x-15<0$ thì VT(2) > 4 > VP(2)

+ Nếu $x^2+4x-15=0$ thì VT(2) = 4 = VP(2)

Khi $x^2+4x-15=0$ thì

$$\begin{cases} b=4 \\ a=3x+2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{31-4x-x^2}=4 \\ \sqrt{7x^2+20x-86}=2-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 31-4x-x^2=16 \\ 7x^2+20x-86=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ -x^2-4x+15=0 \\ 6(x^2+4x-15)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x=-2\pm\sqrt{19} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x$=-2-\sqrt{19}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=-2+\sqrt{34}, x=-2-\sqrt{19}$

Ví dụ 3: Giải hệ ph□ơng trình

$$\begin{cases} 20x^3-11x=4y^2.(1) \\ \sqrt{1-2xy}+y.\sqrt[3]{x^2+y^2}=x.(2) \end{cases}$$

Phân tích:

Với PT(2) ta nhẩm đ□ợc e =f =1 và $(P_0;Q_0)=(x-y;1)$

vì $\begin{cases} x-y+y.1=x \\ (x-y)^2+1^2=(1-2xy)+(x^2+y^2) \end{cases}$

Lời giải: điều kiện $1-2xy\ge 0$

Đặt $\sqrt{1-2xy}=a$; $\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

Suy ra $a^2+b^3=x^2+y^2-2xy+1$ (3)

Từ (2) ta có a + yb = x $\Rightarrow a=x-yb$ (4) thay vào (3) đ□ợc $(x-by)^2+b^3=x^2+y^2-2xy+1$

$$\Leftrightarrow b^3-1-2xy(b-1)+y^2(b^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)[b^2+b+1-2xy+y^2(b+1)]=0$$

$\Leftrightarrow b=1$ hoặc $b^2+b+1-2xy+y^2(b+1)=0$ (5)

+Có $\sqrt[3]{x^2+y^2}=b\ge 0$ nên $b^2+b\ge 0$; $b+1>0$

Nếu $1-2xy=y^2(b+1)=0$ thì $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ (vô lý)

Vậy 2 số không âm $1-2xy$ và $y^2(b+1)$ không đồng thời bằng 0 nên $1-2xy+y^2(b+1)>0$

do đó $VT(5)>0$ Suy ra PT(5) vô nghiệm

+Với b = 1 thay vào (4) đ□ợc $a=x-y$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{1-2xy}=x-y \\ \sqrt[3]{x^2+y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ge 0 \\ 1-2xy=(x-y)^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} (*)$$

kết hợp hệ PT(*) với PT(1) ta có hệ:

$$\begin{cases} x\ge y \\ 20x^3-11x=4y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ 20x^3-11x=4(1-x^2) \\ y^2=1-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \\ 20x^3 + 4x^2 - 11x - 4 = 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \\ (2x+1)^2(5x-4) = 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \\ x = \frac{-1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \text{(I)} \quad \textbf{hoặc} \quad \begin{cases} x \ge y \\ x = \frac{4}{5} \\ y^2 = \frac{9}{25} \end{cases} \text{(II)}$$

Giải hệ PT (I) và (II) ta đ□ợc nghiệm (x;y) là: $(\frac{-1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2});(\frac{4}{5};\frac{3}{5})$ và $(\frac{4}{5};\frac{-3}{5})$

Vậy hệ PT đã cho có 3 nghiệm (x;y) là : $(\frac{-1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2});(\frac{4}{5};\frac{3}{5})$ và $(\frac{4}{5};\frac{-3}{5})$

bài tập

bài 1 Giải ph□ơng trình

a) $\sqrt[3]{\frac{12x^2+12x+9}{4}} = x + \sqrt[4]{\frac{4x^3-2}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{2} - 6x^2} - x.\sqrt[3]{7x^2 + 2x + \frac{1}{2}} = 1$

b) $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = x + (x-1)\sqrt{x^2 + x - 4}$

d) $\sqrt{2x^2 + 48x - 27} + x.\sqrt{2x^2 - 24x + 67} = 4x + 6$

bài 2 Giải hệ ph□ơng trình

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = \frac{65}{8} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2} - y.\sqrt{2xy - 1} = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^3 + 3y^3 + x^3y^3 = 35 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2xy + 4} - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8xy^2 - 2x = 1 \\ \sqrt{5 + 4x - y^2} - x.\sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2 + 2}{3}} = 2 \end{cases}$

Sau đây là phần bổ xung thêm các thí dụ dạng này:

Dạng :*đặt ẩn phụ không hoàn toàn kiểuVũ Hồng Phong*

Một số thí dụ của dạng này tác giả đã nêu ở phần đặt ẩn phụ ở phần trên. Sau đây là các thí dụ bổ xung

Thí dụ 1 Giải phương trình

$\sqrt{x^4 + 3x^3 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + x^3 + 2} = x - 1$

Hướng dẫn.

$\sqrt{x^4+3x^3-x^2+1}-\sqrt{x^4+x^3+2}=x-1$

Dễ thấy x=1 là nghiệm của phương trình

Xét $x\neq 1$

Đặt $\sqrt{x^4+3x^3-x^2+1}=a\geq 0;\sqrt{x^4+x^3+2}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ: $a^2-b^2=2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)(*)$

Pt đã cho trở thành: $a-b=x-1(**)$

Giải (*) và (**) suy ra: $\begin{cases}(a-b)(a+b)=(x-1)(2x^2+x+1)\\ a-b=x-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2x^2+x+1\\ a-b=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=x^2+x\\ b=x^2+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\geq 0\\ x^4+3x^3-x^2+1=(x^2+1)^2\\ x^4+x^3+2=(x^2+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\geq 0\\ (x-1)(x^2-x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=1;x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Cánh khác: nhân liên hợp tìm được tổng hiệu 2 căn

Việc tạo ra phương trình loại này cũng không quá khó khăn. Xin nêu cách tạo ra một phương trình đơn giản của dạng này như sau:

Đầu tiên ta định hướng các căn sẽ bằng gì sau khi biến đổi

Thí dụ tác giả muốn cả 2 căn đều bằng x^2+1

Còn ở thí dụ 1 thì ta chọn :

$\sqrt{x^4+3x^3-x^2+1}=x^2+x;\sqrt{x^4+x^3+2}=x^2+1$

Bước tiếp theo là chọn ra mối liên hệ giữa các ẩn (cần tạo ra PT khó thì phải khéo léo),tác giả xin nêu ra một liên hệ đơn giản là:

$a^2+b^2=(x^2+1)^2+(x^2+1)^2=2x^4+4x^2+2(*)$

Còn ở thí dụ 1 thì ta chọn :

$a^2-b^2=2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)$

Bước quan trọng nhất là khéo léo chọn a,b(chọ a hay b trước tùy bài) để được nghiệm theo ý muốn.

Thí dụ tác giả muốn nghiệm đẹp nên chọn a :

$a=\sqrt{x^4+x^2+x+1}$

Từ (*) suy ra $b=\sqrt{x^4+3x^2-x+1}$

Song song với việc chọn a,b là việc tạo ra PT như thế nào cho việc khống chế các PT sau khi biến đổi hợp lí.

Thí dụ tác giả tạo ra PT nhẹ nhàng sau:

Thí dụ 2 Giải phương trình

$\sqrt{x^4+x^2+x+1}+\sqrt{x^4+3x^2-x+1}=2x^2+2$

Hướng dẫn.

Đặt $a=\sqrt{x^4+x^2+x+1}$

$b=\sqrt{x^4+3x^2-x+1}$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=(x^2+1)^2+(x^2+1)^2=2x^4+4x^2+2(*)$

Pt đã cho trở thành: $a+b=x^2+1(**)$

Giải hệ gồm (*) và (**) bằng phương pháp thế ta được

$a=\sqrt{x^4+x^2+x+1}=x^2+1$

$b=\sqrt{x^4+3x^2-x+1}=x^2+1$

Giải tiếp suy ra PT đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=0$

Chú ý:

Việc chọn mối liên hệ phức tạp hơn có nhiều lựa chọn ví dụ như:

$2a^2+b^2=.....\ 2a^2+3b^2=.....\ 2a^2-3b^2=.....\ 2a^2-b^2=.....$

$\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2=.....$

Việc chọn phương trình tạp hơn có nhiều lựa chọn ví dụ như:

$a+2b=......\ 3a+2b=......\ 3a-2b=......\ \frac{1}{3}a-2b=......$

$(x-1)a-2b=......\ a+xb=......$

Việc chọn căn bậc ba, bậc 4,…..hướng tạo ra tương tự

Một số thí dụ khó hơn

Đầu tiên ta định hướng các căn a,blần lượt bằng $x^4; x^2+1$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Chọn $a=\sqrt{x^8-x^4+2x^2-x}\ge 0$

$b=\sqrt{2x^4+x+1}\ge 0$

Thí dụ 3 Giải phương trình

$\sqrt{x^8-x^4+2x^2-x}=1+(x^2-1)\sqrt{2x^4+x+1}$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh

Hướng dẫn chi tiết tạo PT.

Chọn dạng $\sqrt{m}=(x^2-1)\sqrt{n}+p$

Chọn các căn sau khi biến đổi: $\sqrt{m}=x^4; \sqrt{n}=x^2+1; p=1$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Chọn: $\sqrt{n}=x^2+1; n=2x^4+x+1$

Từ(*) suy ra: $m=x^8-x^4+2x^2-x$

Việc chọn n hay n trước cần hợp lí.

Đến đây tác giả tin rằng mọi người sẽ tự tạo ra được rất nhiều phương trình dạng này !!!

Hướng dẫn giải:

Đặt $a=\sqrt{x^8-x^4+2x^2-x}\ge 0$

$b=\sqrt{2x^4+x+1}\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=1+(x^2-1)b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$\left(1+(x^2-1)b\right)^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow \left(1+(x^2-1)^2\right)b^2+2(x^2-1)b-(x^2+1)x^2(x^4-x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + 1 \\ b = \dfrac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} \le 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$$\frac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

X=0 không làm cho b=0

Suy ra

$$b = \sqrt{2x^4 + x + 1} = x^2 + 1$$

Thay vào (**) được:

$$a = \sqrt{x^8 - x^4 + 2x^2 - x} = x^4$$

Suy ra

$$x = 0; x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

PT đã cho có 4 nghiệm $x = 0; x = 1; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 4 Giải phương trình

$$\sqrt{x^8 + x^3 - 2} = 1 + (x^2 - 1)\sqrt{x^4 - x^3 + 2x^2 + 3}$$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $a = \sqrt{x^8 + x^3 - 2} \ge 0$

$b = \sqrt{x^4 - x^3 + 2x^2 + 3} \ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$$a^2 + b^2 = x^8 + x^4 + 2x^2 + 1(*)$$

Pt đã cho trở thành: $a = 1 + (x^2 - 1)b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$\left(1 + (x^2 - 1)b\right)^2 + b^2 = x^8 + x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + (x^2 - 1)^2\right)b^2 + 2(x^2 - 1)b - (x^2 + 1)x^2(x^4 - x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + 1 \\ b = \dfrac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} \le 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$$\frac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

X=0 không làm cho b=0

Suy ra

$$b = \sqrt{x^4 - x^3 + 2x^2 + 3} = x^2 + 1$$

Thay vào (**) được:

$$a = \sqrt{x^8 + x^3 - 2} = x^4$$

Suy ra

$$x = \sqrt[3]{2}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x = \sqrt[3]{2}$

Thí dụ 5 **Giải phương trình**

$\sqrt{x^8-x^5-2}=1+(x^2-1)\sqrt{x^5+x^4+2x^2+3}$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^8-x^5-2}=a\geq 0$

$\sqrt{x^5+x^4+2x^2+3}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=1+(x^2-1)b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(1+(x^2-1)b)^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+(x^2-1)^2)b^2+2(x^2-1)b-(x^2+1)x^2(x^4-x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^4-x^2+2)}{1+(x^2-1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$\dfrac{-x^2(x^4-x^2+2)}{1+(x^2-1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

X=0không làm cho b=0

Suy ra

$\sqrt{x^5+x^4+2x^2+3}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{x^8-x^5-2}=x^4$

Suy ra

$x=-\sqrt[5]{2}$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=-\sqrt[5]{2}$

Thí dụ 6 **Giải phương trình**

$\sqrt{x^{12}+x^2+3x}=(x^4-x^2+1)\sqrt{x^4+x^2-3x+1}-1$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^{12}+x^2+3x}=a\geq 0$

$\sqrt{x^4+x^2-3x+1}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=(x^4-x^2+1)b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$((x^4-x^2+1)b-1)^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+(x^4-x^2+1)^2)b^2+2(x^4-x^2+1)b-(x^2+1)x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x=0 không làm cho b=0

Suy ra

$\sqrt{x^4+x^2-3x+1}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{x^{12}+x^2+3x}=x^6$

Suy ra

$x=0; x=-3$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-3$

Thí dụ 7 Giải phương trình

$\sqrt{x^{12}+2x^4+3x}=(x^4-x^2+1)\sqrt{-x^4+2x^2-3x+1}-1$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^{12}+2x^4+3x}=a\geq 0$

$\sqrt{-x^4+2x^2-3x+1}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=(x^4-x^2+1)b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$((x^4-x^2+1)b-1)^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+(x^4-x^2+1)^2)b^2+2(x^4-x^2+1)b-(x^2+1)x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x=0 không làm cho b=0

Suy ra

$\sqrt{-x^4+2x^2-3x+1}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{x^{12}+2x^4+3x}=x^6$

Suy ra

$x=0; x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

Thí dụ 8 Giải phương trình

$\sqrt{x^{12}+2x^2+x-1}=(x^4-x^2+1)\sqrt{x^4-x+2}-1$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^{12}+2x^2+x-1}=a\geq 0$

$\sqrt{x^4-x+2}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=(x^4-x^2+1)b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$\left((x^4-x^2+1)b-1\right)^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(1+(x^4-x^2+1)^2\right)b^2+2(x^4-x^2+1)b-(x^2+1)x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}\le 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$$\frac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

x=0 không làm cho b=0

Suy ra

$$\sqrt{x^4-x+2}=x^2+1$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{x^{12}+2x^2+x-1}=x^6$$

Suy ra

$$x=-1; x=\frac{1}{2}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=-1; x=\dfrac{1}{2}$

Thí dụ 9 Giải phương trình

$$\sqrt{x^{12}+2x^2+x-2}=(x^4-x^2+1)\sqrt{x^4-x+3}-1$$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^{12}+2x^2+x-2}=a\ge 0$

$\sqrt{x^4-x+3}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=(x^4-x^2+1)b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$\left((x^4-x^2+1)b-1\right)^2+b^2=x^{12}+x^4+2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(1+(x^4-x^2+1)^2\right)b^2+2(x^4-x^2+1)b-(x^2+1)x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}\le 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$$\frac{-x^2(x^8-x^6+x^4-x^2+2)}{1+(x^4-x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

x=0 không làm cho b=0

Suy ra

$$\sqrt{x^4-x+3}=x^2+1$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{x^{12}+2x^2+x-2}=x^6$$

Suy ra

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

Thí dụ 10 Giải phương trình

$\sqrt{x^8+2x^2+3x-2}=1+(x^2-1)\sqrt{x^4-3x+3}$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^8+2x^2+3x-2}=a\geq 0$

$\sqrt{x^4-3x+3}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=1+(x^2-1)b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$\left(1+(x^2-1)b\right)^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(1+(x^2-1)^2\right)b^2+2(x^2-1)b-(x^2+1)x^2(x^4-x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=\dfrac{-x^2(x^4-x^2+2)}{1+(x^2-1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$

Dễ thấy

$\frac{-x^2(x^4-x^2+2)}{1+(x^2-1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x=0không làm cho b=0

Suy ra

$\sqrt{x^4-3x+3}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{x^8+2x^2+3x-2}=x^4$

Suy ra

$x=-2;x=\frac{1}{2}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=-2;x=\frac{1}{2}$

Thí dụ 11 Giải phương trình

$\sqrt{x^8+2x^2+3x-3}=1+(x^2-1)\sqrt{x^4-3x+4}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^8+2x^2+3x-3}=a\geq 0$

$\sqrt{x^4-3x+4}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=1+(x^2-1)b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$\left(1+(x^2-1)b\right)^2+b^2=x^8+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(1+(x^2-1)^2\right)b^2+2(x^2-1)b-(x^2+1)x^2(x^4-x^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + 1 \\ b = \dfrac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} \le 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy

$$\frac{-x^2(x^4 - x^2 + 2)}{1 + (x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x=0không làm cho b=0

Suy ra

$$\sqrt{x^4 - 3x + 4} = x^2 + 1$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{x^8 + 2x^2 + 3x - 3} = x^4$$

Suy ra

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

Thí dụ 12 Giải phương trình

$$\sqrt{x^6 + 2x^3 - 3} = x + (x - 1)\sqrt{x^4 + x^2 + 3}$$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^6 + 2x^3 - 3} = a \ge 0$

$\sqrt{x^4 + x^2 + 3} = b > 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

Pt đã cho trở thành: $a = x + (x - 1)b$

Thay a vào (*) ta được

$$\left(x + (x - 1)b\right)^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + (x - 1)^2\right)b^2 + 2x(x - 1)b - (x^2 + x)x^2(x^2 - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + x \\ b = \dfrac{-x^2(x^2 - x + 2)}{1 + (x - 1)^2} \le 0 (loai) \end{array}\right.$$ (vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 3} = x^2 + x$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{x^6 + 2x^3 - 3} = x^3$$

Suy ra

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

Thí dụ 13 Giải phương trình

$$\sqrt{x^6 + 2x^3 + x^2 - 20} = x + (x - 1)\sqrt{x^4 + 20}$$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x^6+2x^3+x^2-20}=a\geq 0$

$\sqrt{x^4+20}=b>0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

Pt đã cho trở thành: $a=x+(x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+(x-1)b)^2+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow \left(1+(x-1)^2\right)b^2+2x(x-1)b-(x^2+x)x^2(x^2-x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+x \\ b=\dfrac{-x^2(x^2-x+2)}{1+(x-1)^2}\leq 0(loai) \end{array}\right.$

(vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^4+20}=x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{x^6+2x^3+x^2-20}=x^3$

Suy ra

$x=2$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=2$

Thí dụ 14 Giải phương trình

$\sqrt{2x^3+3}=x+(x-1)\sqrt{x^6+x^4+x^2-3}$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{2x^3+3}=a\geq 0$

$\sqrt{x^6+x^4+x^2-3}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

Pt đã cho trở thành: $a=x+(x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+(x-1)b)^2+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow \left(1+(x-1)^2\right)b^2+2x(x-1)b-(x^2+x)x^2(x^2-x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+x \\ b=\dfrac{-x^2(x^2-x+2)}{1+(x-1)^2}\leq 0(loai) \end{array}\right.$

(vìx=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4+x^2-3}=x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{2x^3+3}=x^3$

Suy ra

$x^6-2x^3-3=0(x^3\geq 0)\Leftrightarrow x=-1(loai);x=\sqrt[3]{3}$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{3}$

Thí dụ 15 Giải phương trình

$\sqrt{2x^3+1} = x + (x-1)\sqrt{x^6+x^4+x^2-1}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{2x^3+1} = a \geq 0$

$\sqrt{x^6+x^4+x^2-1} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2 = x^6+x^4+2x^3+x^2$

Pt đã cho trở thành: $a = x+(x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+(x-1)b)^2 + b^2 = x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow (1+(x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2+x)x^2(x^2-x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2+x \\ b = \dfrac{-x^2(x^2-x+2)}{1+(x-1)^2} \leq 0(loai) \end{array}\right.$ (vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4+x^2-1} = x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{2x^3+1} = x^3$

Suy ra

$x^6-2x^3-1 = 0 (x^3 \geq 0, x^2+x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$

PT đã cho có 1 nghiệm $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$

Thí dụ 16 Giải phương trình

$\sqrt{3x^3-1} = x + (x-1)\sqrt{x^6+x^4-x^3+x^2+1}$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{3x^3-1} = a \geq 0$

$\sqrt{x^6+x^4-x^3+x^2+1} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2 = x^6+x^4+2x^3+x^2$

Pt đã cho trở thành: $a = x+(x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+(x-1)b)^2 + b^2 = x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow (1+(x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2+x)x^2(x^2-x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2+x \\ b = \dfrac{-x^2(x^2-x+2)}{1+(x-1)^2} \leq 0(loai) \end{array}\right.$ (vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-x^3+x^2+1} = x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{3x^3-1} = x^3$

Suy ra

$x^6 - 3x^3 + 1 = 0 (x^3 \geq 0, x^2 + x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Thí dụ 17 Giải phương trình

$\sqrt{3x^3 - 2} = x + (x-1)\sqrt{x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 2}$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{3x^3 - 2} = a \geq 0$

$\sqrt{x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 2} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

Pt đã cho trở thành: $a = x + (x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x + (x-1)b)^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

$\Leftrightarrow (1 + (x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2 + x)x^2(x^2 - x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + x \\ b = \dfrac{-x^2(x^2 - x + 2)}{1 + (x-1)^2} \leq 0 (loai) \end{array}\right.$ (vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 2} = x^2 + x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{3x^3 - 2} = x^3$

Suy ra

$x^6 - 3x^3 + 2 = 0 (x^3 \geq 0, x^2 + x \geq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{array}\right.$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = 1; x = \sqrt[3]{2}$

Thí dụ 18 Giải phương trình

$\sqrt{5x^3 - 2} = x + (x-1)\sqrt{x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 2}$

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{5x^3 - 2} = a \geq 0$

$\sqrt{x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 2} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

Pt đã cho trở thành: $a = x + (x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x + (x-1)b)^2 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

$\Leftrightarrow (1 + (x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2 + x)x^2(x^2 - x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + x \\ b = \dfrac{-x^2(x^2 - x + 2)}{1 + (x-1)^2} \leq 0 (loai) \end{array}\right.$ (vì x=0không làm cho b=0)

Suy ra

$\sqrt{x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 2} = x^2 + x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{5x^3-2}=x^3$

Suy ra

$x^6-5x^3+2=0(x^3\ge 0, x^2+x\ge 0)\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$

Thí dụ 19 Giải phương trình

$\sqrt{6x^3-3}=x+(x-1)\sqrt{\dfrac{x^6}{3}+x^4+x^2+1}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x\ge\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt{6x^3-3}=a\ge 0$

$\sqrt{\dfrac{x^6}{3}+x^4+x^2+1}=b>0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+3b^2=x^6+3x^4+6x^3+3x^2(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=x+(x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+(x-1)b)^2+3b^2=x^6+3x^4+6x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow (3+(x-1)^2)b^2+2x(x-1)b-(x^2+x)x(x^3-x^2+4x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+x \\ b=\dfrac{-x(x^3-x^2+4x+2)}{3+(x-1)^2}<0(loai)\end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{\dfrac{x^6}{3}+x^4+x^2+1}=x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{6x^3-3}=x^3$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^6}{3}+x^4+x^2+1}=x^2+x \\ \sqrt{6x^3-3}=x^3\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^6-6x^3+3=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3\pm\sqrt{6}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{3\pm\sqrt{6}}$

Thí dụ 20 Giải phương trình

$\sqrt{4x^3-2}=x+(x-1)\sqrt{\dfrac{x^6}{2}+x^4+x^2+1}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt{4x^3 - 2} = a \ge 0$

$\sqrt{\frac{x^6}{2} + x^4 + x^2 + 1} = b > 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + 3b^2 = x^6 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 (*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + (x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x + (x-1)b)^2 + 2b^2 = x^6 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$

$\Leftrightarrow (2 + (x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2 + x)x(x^3 - x^2 + 3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + x \\ b = \dfrac{-x(x^3 - x^2 + 3x + 1)}{3 + (x-1)^2} < 0 (loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{\frac{x^6}{2} + x^4 + x^2 + 1} = x^2 + x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{4x^3 - 2} = x^3$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^6}{2} + x^4 + x^2 + 1} = x^2 + x \\ \sqrt{4x^3 - 2} = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^6 - 4x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}$

Thí dụ 21 Giải phương trình

$\sqrt{10x^3 - 5} = x + (x-1)\sqrt{\frac{x^6}{5} + x^4 + x^2 + 1}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt{10x^3 - 5} = a \ge 0$

$\sqrt{\frac{x^6}{5} + x^4 + x^2 + 1} = b > 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + 5b^2 = x^6 + 5x^4 + 10x^3 + 5x^2 (*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + (x-1)b$

Thay a vào (*) ta được

$(x + (x-1)b)^2 + 5b^2 = x^6 + 5x^4 + 10x^3 + 5x^2$

$\Leftrightarrow (5 + (x-1)^2)b^2 + 2x(x-1)b - (x^2 + x)x(x^3 - x^2 + 6x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + x \\ b = \dfrac{-x(x^3 - x^2 + 6x + 4)}{5 + (x-1)^2} < 0 (loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{\frac{x^6}{5}+x^4+x^2+1}=x^2+x$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{10x^3-5}=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x^6}{5}+x^4+x^2+1}=x^2+x\\ \sqrt{10x^3-5}=x^3\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^6-10x^3+5=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{5\pm 2\sqrt{5}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{5\pm 2\sqrt{5}}$

Thí dụ 22 Giải phương trình

$\sqrt{4x^3-3}=x+x.\sqrt{x^6+x^4-4x^3-2x^2+4}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x\ge\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

Đặt $\sqrt{4x^3-3}=a\ge 0$

$\sqrt{x^6+x^4-4x^3-2x^2+4}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=x+x.b$

Thay a vào (*) ta được

$(x+xb)^2+b^2=x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+x^2)b^2+2x^2b-(x^2-1)(x^4+2x^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=x^2-1\\ b=\frac{x^4+2x^2-1}{1+x^2}<0(loai)\end{array}\right.$$

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-4x^3-2x^2+4}=x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{4x^3-3}=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{x^6+x^4-4x^3-2x^2+4}=x^2-1\\ \sqrt{4x^3-3}=x^3\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^6-4x^3+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{3}; x=1$

Thí dụ 23 Giải phương trình

$\sqrt{\frac{5x^3-3}{2}}=x+x.\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+4}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

Đặt $\sqrt{\frac{5x^3-3}{2}} = a \ge 0$

$\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+4} = b \ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + x.b$

Thay a vào (*) ta được

$2(x+xb)^2 + b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)b^2 + 4x^2b - (x^2-1)(2x^4+3x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2-1 \\ b = \dfrac{-(2x^4+3x^2-1)}{1+2x^2} < 0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+4} = b = x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{\frac{5x^3-3}{2}} = a = x^3$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+4} = x^2-1 \\ \sqrt{\dfrac{5x^3-3}{2}} = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^6-5x^3+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}; x = 1$

Thí dụ 24 **Giải phương trình**

$\sqrt{\frac{5x^3-2}{2}} = x + x.\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+3}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Đặt $\sqrt{\frac{5x^3-2}{2}} = a \ge 0$

$\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+3} = b \ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + x.b$

Thay a vào (*) ta được

$2(x+xb)^2 + b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)b^2 + 4x^2b - (x^2-1)(2x^4+3x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2-1 \\ b = \dfrac{-(2x^4+3x^2-1)}{1+2x^2} < 0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+3}=b=x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{\dfrac{5x^3-2}{2}}=a=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{2x^6+x^4-5x^3-2x^2+3}=x^2-1\\ \sqrt{\dfrac{5x^3-2}{2}}=x^3\end{cases}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ 2x^6-5x^3+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{2}$

Thí dụ 25 Giải phương trình

$\sqrt{\dfrac{7x^3-4}{2}}=x+x.\sqrt{2x^6+x^4-7x^3-2x^2+5}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x\geq \sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$

Đặt $\sqrt{\dfrac{7x^3-4}{2}}=a\geq 0$

$\sqrt{2x^6+x^4-7x^3-2x^2+5}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+b^2=2x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a=x+x.b$

Thay a vào (*) ta được

$2(x+xb)^2+b^2=2x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)b^2+4x^2b-(x^2-1)(2x^4+3x^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=x^2-1\\ b=\dfrac{-(2x^4+3x^2-1)}{1+2x^2}<0(loai)\end{array}\right.$$

Suy ra

$\sqrt{2x^6+x^4-7x^3-2x^2+5}=b=x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{\dfrac{7x^3-4}{2}}=a=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{2x^6+x^4-7x^3-2x^2+5}=x^2-1\\ \sqrt{\dfrac{7x^3-4}{2}}=x^3\end{cases}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ 2x^6-7x^3+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}}$

Thí dụ 26 Giải phương trình

$\sqrt{4x^3-2}=x+x.\sqrt{2x^6+x^4-8x^3-2x^2+5}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt{4x^3-2} = a \ge 0$

$\sqrt{2x^6+x^4-8x^3-2x^2+5} = b \ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + x.b$

Thay a vào (*) ta được

$2(x+xb)^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)b^2+4x^2b-(x^2-1)(2x^4+3x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2-1 \\ b = \dfrac{-(2x^4+3x^2-1)}{1+2x^2} < 0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{2x^6+x^4-8x^3-2x^2+5} = b = x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{4x^3-2} = a = x^3$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{2x^6+x^4-8x^3-2x^2+5} = x^2-1 \\ \sqrt{4x^3-2} = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^6-4x^3+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$

PT đã cho có 1 nghiệm $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$

Thí dụ 27 **Giải phương trình**

$\sqrt{3x^3-1} = x + x.\sqrt{2x^6+x^4-6x^3-2x^2+3}$

Hướng dẫn.

ĐK: $x \ge \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Đặt $\sqrt{3x^3-1} = a \ge 0$

$\sqrt{2x^6+x^4-6x^3-2x^2+3} = b \ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành: $a = x + x.b$

Thay a vào (*) ta được

$2(x+xb)^2+b^2 = 2x^6+x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)b^2+4x^2b-(x^2-1)(2x^4+3x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2-1 \\ b = \dfrac{-(2x^4+3x^2-1)}{1+2x^2} < 0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{2x^6+x^4-6x^3-2x^2+3} = b = x^2-1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{3x^3-1} = a = x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{2x^6+x^4-6x^3-2x^2+3}=x^2-1\\ \sqrt{3x^3-1}=x^3\end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ x^6-3x^3+1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Thí dụ 28 **Giải phương trình**

$$\sqrt{2x^3+1}=x^2+(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^6+4x^4-2x^3-1}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{2x^3+1}=a\geq 0$

$\sqrt{4x^6+4x^4-2x^3-1}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=4x^6+4x^4(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=x^2+(x-\frac{1}{2})b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$\left(x^2+(x-\frac{1}{2})b\right)^2+b^2=4x^6+4x^4$$

$$\Leftrightarrow \left(1+(x-\frac{1}{2})^2\right)b^2+2x^2(x-\frac{1}{2})b-2x^2(2x^4+\frac{3}{2}x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=2x^2\\ b=\dfrac{-(2x^4+\frac{3}{2}x^2)}{1+(x-\frac{1}{2})^2}\leq 0\end{array}\right.$$

Ta thấy

$$\frac{-\left(4x^4+\frac{3}{2}x^2\right)}{1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

Khi x=0 thì b không tồn tại

Suy ra

$\sqrt{4x^6+4x^4-2x^3-1}=b=2x^2$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{2x^3+1}=a=2x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{4x^6+4x^4-2x^3-1}=2x^2\\ \sqrt{2x^3+1}=2x^3\end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ 4x^6-2x^3-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$

Thí dụ 29 **Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^3-1}=x^2+(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^6+4x^4-6x^3+1}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x\ge\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$

Đặt $\sqrt{6x^3-1}=a\ge 0$

$\sqrt{4x^6+4x^4-6x^3+1}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=4x^6+4x^4(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=x^2+(x-\frac{1}{2})b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$\left(x^2+(x-\frac{1}{2})b\right)^2+b^2=4x^6+4x^4$$

$$\Leftrightarrow\left(1+(x-\frac{1}{2})^2\right)b^2+2x^2(x-\frac{1}{2})b-2x^2(2x^4+\frac{3}{2}x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2x^2\\ b=\dfrac{-(2x^4+\frac{3}{2}x^2)}{1+(x-\frac{1}{2})^2}<0\end{array}\right.$$

Suy ra

$\sqrt{4x^6+4x^4-6x^3+1}=b=2x^2$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{6x^3-1}=a=2x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{4x^6+4x^4-6x^3+1}=2x^2\\ \sqrt{6x^3-1}=2x^3\end{cases}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 4x^6-6x^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}}$

Thí dụ 30 **Giải phương trình**

$$\sqrt{7x^3-2}=x^2+(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^6+4x^4-7x^3+2}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x\ge\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Đặt $\sqrt{7x^3-2}=a\ge 0$

$\sqrt{4x^6+4x^4-7x^3+2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=4x^6+4x^4(*)$

Pt đã cho trở thành:

$$a = x^2 + (x - \frac{1}{2})b(**)$$

Thay a vào (*) ta được

$$\left(x^2 + (x - \frac{1}{2})b\right)^2 + b^2 = 4x^6 + 4x^4$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + (x - \frac{1}{2})^2\right)b^2 + 2x^2(x - \frac{1}{2})b - 2x^2(2x^4 + \frac{3}{2}x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2x^2 \\ b = \dfrac{-(2x^4 + \frac{3}{2}x^2)}{1 + (x - \frac{1}{2})^2} < 0 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\sqrt{4x^6 + 4x^4 - 7x^3 + 2} = b = 2x^2$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{7x^3 - 2} = a = 2x^3$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{4x^6 + 4x^4 - 7x^3 + 2} = 2x^2 \\ \sqrt{7x^3 - 2} = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^6 - 7x^3 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{17}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{17}}$

Thí dụ 31 Giải phương trình

$$\sqrt{5x^3 - \frac{1}{2}} = x^2 + (x - \frac{1}{2})\sqrt{\frac{8x^6 + 12x^4 - 10x^3 + 1}{3}}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

Đặt $\sqrt{5x^3 - \frac{1}{2}} = a \geq 0$

$$\sqrt{\frac{8x^6 + 12x^4 - 10x^3 + 1}{3}} = b \geq 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$$2a^2 + 3b^2 = 8x^6 + 12x^4 (*)$$

Pt đã cho trở thành:

$$a = x^2 + (x - \frac{1}{2})b(**)$$

Thay a vào (*) ta được

$$2\left(x^2 + (x - \frac{1}{2})b\right)^2 + 3b^2 = 8x^6 + 12x^4$$

$$\Leftrightarrow \left(3 + 2(x - \frac{1}{2})^2\right)b^2 + 4x^2(x - \frac{1}{2})b - 2x^2(4x^4 + 5x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2x^2 \\ b=\dfrac{-(4x^4+5x^2)}{3+2(x-\frac{1}{2})^2}<0 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{8x^6+12x^4-10x^3+1}{3}}=b=2x^2$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{5x^3-\frac{1}{2}}=a=2x^3$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{8x^6+12x^4-10x^3+1}{3}}=2x^2 \\ \sqrt{5x^3-\dfrac{1}{2}}=2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 8x^6-10x^3+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{5\pm\sqrt{17}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{5\pm\sqrt{17}}$

Thí dụ 32 **Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^3-1}=x^2+(x-\frac{1}{2})\sqrt{\frac{8x^6+12x^4-10x^3+2}{3}}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $x\ge\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

Đặt $\sqrt{5x^3-1}=a\ge 0$

$$\sqrt{\frac{8x^6+12x^4-10x^3+2}{3}}=b\ge 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$2a^2+3b^2=8x^6+12x^4(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=x^2+(x-\frac{1}{2})b(**)$

Thay a vào (*) ta được

$$2\left(x^2+(x-\frac{1}{2})b\right)^2+3b^2=8x^6+12x^4$$

$$\Leftrightarrow \left(3+2(x-\frac{1}{2})^2\right)b^2+4x^2(x-\frac{1}{2})b-2x^2(4x^4+5x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2x^2 \\ b=\dfrac{-(4x^4+5x^2)}{3+2(x-\frac{1}{2})^2}<0 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{8x^6+12x^4-10x^3+2}{3}}=b=2x^2$$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{5x^3-1}=a=2x^3$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8x^6+12x^4-10x^3+2}{3}}=2x^2\\ \sqrt{5x^3-1}=2x^3\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 4x^6-5x^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\end{array}\right.$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

Thí dụ 33 Giải phương trình

$x+\sqrt[3]{5x^3-4}=\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}(*)$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Do $VP(*)\ge 0$ **nên** $VT(*)=x+\sqrt[3]{5x^3-4}\ge 0$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{5x^3-4}\ge -x\Leftrightarrow 5x^3-4\ge -x^3\Leftrightarrow 6x^3-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

Đặt $\sqrt[3]{5x^3-4}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2(**)$

Pt đã cho trở thành:

$x+a=b(***)$

Thay b vào (**) ta được

$a^3+(a+x)^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow a^3-x^6+a^2-x^4+2xa-2x^3=0$

$\Leftrightarrow(a-x^2)[a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x]=0(****)$

Do $VP(*)=x+a\ge 0$ **và** $x\ge\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ **nên**

$a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x=(a^2+ax^2+x^4)+a+x+x^2+x>0$

Suy ra

$(****)\Leftrightarrow a=x^2$

$\to\sqrt[3]{5x^3-4}=a=x^2$

Thay vào (***) được:

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}=b=x^2+x$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt[3]{5x^3-4}=x^2\\ \sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}=x^2+x\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^6-5x^3+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\sqrt[3]{4}\end{array}\right.$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=\sqrt[3]{4}$

Chú ý: từ PT

$x+\sqrt[3]{5x^3-4}=\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}(*)$

Sửa số 4 thành 1 trong các số 1,2,3,…chẳng hạn số 3 ta được PT sau:

Thí dụ 34 **Giải phương trình**

$x+\sqrt[3]{5x^3-3}=\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+3}(*)$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Do $VP(*)\ge 0$ **nên** $VT(*)=x+\sqrt[3]{5x^3-3}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5x^3-3}\ge -x \Leftrightarrow 5x^3-3\ge -x^3 \Leftrightarrow 6x^3-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt[3]{5x^3-3}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+3}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2(**)$

Pt đã cho trở thành:

$x+a=b(***)$

Thay b vào (**) ta được

$a^3+(a+x)^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow a^3-x^6+a^2-x^4+2xa-2x^3=0$

$\Leftrightarrow (a-x^2)[a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x]=0(****)$

Do $VP(*)=x+a\ge 0$ **và** $x\ge \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **nên**

$a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x=(a^2+ax^2+x^4)+a+x+x^2+x>0$

Suy ra

$(****)\Leftrightarrow a=x^2$

$\to \sqrt[3]{5x^3-3}=a=x^2$

Thay vào (***) được:

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+3}=b=x^2+x$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt[3]{5x^3-3}=x^2\\ \sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+3}=x^2+x\end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^6-5x^3+3=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}}$

Thí dụ 35 **Giải phương trình**

$x+\sqrt[3]{5x^3-2}=\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+2}(*)$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Do $VP(*)\ge 0$ **nên** $VT(*)=x+\sqrt[3]{5x^3-2}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5x^3-2}\ge -x \Leftrightarrow 5x^3-2\ge -x^3 \Leftrightarrow 6x^3-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Đặt $\sqrt[3]{5x^3-2}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2(**)$

Pt đã cho trở thành:

$x+a=b(***)$

Thay b vào (**) ta được

$a^3+(a+x)^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow a^3-x^6+a^2-x^4+2xa-2x^3=0$

$\Leftrightarrow (a-x^2)[a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x]=0(****)$

Do $VP(*)=x+a\geq 0$ **và** $x\geq\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ **nên**

$a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x=(a^2+ax^2+x^4)+a+x+x^2+x>0$

Suy ra

$(****)\Leftrightarrow a=x^2$

$\rightarrow\sqrt[3]{5x^3-2}=a=x^2$

Thay vào (***) được:

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+2}=b=x^2+x$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt[3]{5x^3-2}=x^2\\ \sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+2}=x^2+x\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^6-5x^3+2=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$

Chú ý: từ PT

$x+\sqrt[3]{5x^3-4}=\sqrt{x^6+x^4-3x^3+x^2+4}(*)$

Sửa số -3 thành -4 thì sửa số 5 thành 6 (-3+5=-4+6=2)ta được PT sau:

Thí dụ 36 Giải phương trình

$x+\sqrt[3]{6x^3-4}=\sqrt{x^6+x^4-4x^3+x^2+4}(*)$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Do $VP(*)\geq 0$ **nên** $VT(*)=x+\sqrt[3]{6x^3-4}\geq 0$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x^3-4}\geq -x\Leftrightarrow 6x^3-4\geq -x^3\Leftrightarrow 7x^3-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$

Đặt $\sqrt[3]{6x^3-4}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-4x^3+x^2+4}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^3+x^2(**)$

Pt đã cho trở thành:

$x+a=b(***)$

Thay b vào (**) ta được

$a^3+(a+x)^2=x^6+x^4+2x^3+x^2$

$\Leftrightarrow a^3-x^6+a^2-x^4+2xa-2x^3=0$

$\Leftrightarrow (a-x^2)[a^2+ax^2+x^4+a+x^2+2x]=0(****)$

Do $VP(*) = x + a \geq 0$ **và** $x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ **nên**

$a^2 + ax^2 + x^4 + a + x^2 + 2x = (a^2 + ax^2 + x^4) + a + x + x^2 + x > 0$

Suy ra

$(****) \Leftrightarrow a = x^2$

$\rightarrow \sqrt[3]{6x^3 - 4} = a = x^2$

Thay vào (***) được:

$\sqrt{x^6 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 4} = b = x^2 + x$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt[3]{6x^3 - 4} = x^2 \\ \sqrt{x^6 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 4} = x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^6 - 6x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{5}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{5}}$

Chú ý: từ PT

$x + \sqrt[3]{5x^3 - 4} = \sqrt{x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}(*)$

Sửa số -3 thành -5 thì sửa số 5 thành 7 (-3+5=-5+7=2)ta được PT sau:

Thí dụ 37 Giải phương trình

$x + \sqrt[3]{7x^3 - 4} = \sqrt{x^6 + x^4 - 5x^3 + x^2 + 4}(*)$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Do $VP(*) \geq 0$ **nên** $VT(*) = x + \sqrt[3]{7x^3 - 4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x^3 - 4} \geq -x \Leftrightarrow 7x^3 - 4 \geq -x^3 \Leftrightarrow 8x^3 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Đặt $\sqrt[3]{7x^3 - 4} = a$

$\sqrt{x^6 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 4} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3 + b^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2(**)$

Pt đã cho trở thành:

$x + a = b(***)$

Thay b vào (**) ta được

$a^3 + (a + x)^2 = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2$

$\Leftrightarrow a^3 - x^6 + a^2 - x^4 + 2xa - 2x^3 = 0$

$\Leftrightarrow (a - x^2)[a^2 + ax^2 + x^4 + a + x^2 + 2x] = 0(****)$

Do $VP(*) = x + a \geq 0$ **và** $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **nên**

$a^2 + ax^2 + x^4 + a + x^2 + 2x = (a^2 + ax^2 + x^4) + a + x + x^2 + x > 0$

Suy ra

$(****) \Leftrightarrow a = x^2$

$\rightarrow \sqrt[3]{7x^3 - 4} = a = x^2$

Thay vào (***) được:

$\sqrt{x^6 + x^4 - 5x^3 + x^2 + 4} = b = x^2 + x$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt[3]{7x^3-4}=x^2\\ \sqrt{x^6+x^4-5x^3+x^2+4}=x^2+x\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^6-7x^3+4=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}}$

Như vậy việc tạo ra phương trình dạng này không khó khăn,thậm chí từ 1 phương trình ta có thể tạo ra nhiều phương trình tương tự.

Tác giả: Vũ Hồng Phong

Thí dụ 38 Giải phương trình

$$1+\sqrt[3]{3x^3+2}=\sqrt{8x^6+4x^4-3x^3+4x^2-1}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt[3]{3x^3+2}=a$

$$\sqrt{8x^6+4x^4-3x^3+4x^2-1}=b\geq 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$$a^3+b^2=8x^6+4x^4+4x^2+1(*)$$

Pt đã cho trở thành:

$$1+a=b(**)\rightarrow 1+a\geq 0$$

Thay b vào (*) ta được

$$a^3+(1+a)^2=8x^6+4x^4+4x^2+1$$

$$\Leftrightarrow a^3-8x^6+a^2-4x^4+2a-4x^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2x^2)[a^2+2ax^2+4x^2+a+2x^2+2]=0$$

Do $1+a\geq 0$ **nên**

$$a^2+2ax^2+4x^4+a+2x^2+2=$$

$$=(a^2+2ax^2+4x^4)+(a+1)+2x^2+1>0$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{3x^3+2}=a=2x^2$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt[3]{8x^6+4x^4-3x^3+4x^2-1}=2x^2+1$$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt[3]{3x^3+2}=2x^2\\ \sqrt{8x^6+4x^4-3x^3+4x^2-1}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 8x^6-3x^3-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{73}}{2}}$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{73}}{2}}$

Chú ý

$$a^3+(1+a)^2=8x^6+4x^4+4x^2+1$$

$$\Leftrightarrow a^3+a^2+2a=8x^6+4x^4+4x^2$$

$$\Leftrightarrow f(a)=f(2x^2)$$

$$f(t)=t^3+t^2+2t$$

$$f'(t)=3t^2+2t+2>0.\forall t$$

Suy ra f(t) đồng biến nên $f(a)=f(2x^2)\Leftrightarrow a=2x^2$

Thí dụ 39 Giải phương trình

$$x+\sqrt{3x^3+5}=x.\sqrt{x^6+x^4-3x^3+2x^2-4}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{3x^3+5}=a\geq 0$

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+2x^2-4}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+x)^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2-2x^2b-(x^2+1)(x^4+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}<0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-3x^3+2x^2-4}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{3x^3+5}=a=x^3$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{3x^3+5}=x^3 \\ \sqrt{x^6+x^4-3x^3+2x^2-4}=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^6-3x^3-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}}$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}}$

Thí dụ 40 Giải phương trình

$x+\sqrt{4x^3-3}=x.\sqrt{x^6+x^4-4x^3+2x^2+4}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{4x^3-3}=a\geq 0$

$\sqrt{x^6+x^4-4x^3+2x^2+4}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+x)^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2-2x^2b-(x^2+1)(x^4+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}<0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-4x^3+2x^2+4}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{4x^3-3}=a=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{4x^3-3}=x^3\\ \sqrt{x^6+x^4-4x^3+2x^2+4}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^6-4x^3+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=\sqrt[3]{3}$

Thí dụ 41 Giải phương trình

$$x+\sqrt{2-3x^3}=x.\sqrt{x^6+x^4+3x^3+2x^2-1}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{2-3x^3}=a\ge 0$

$\sqrt{x^6+x^4+3x^3+2x^2-1}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+x)^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2-2x^2b-(x^2+1)(x^4+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=x^2+1\\ b=-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}<0(loai)\end{array}\right.$$

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4+3x^3+2x^2-1}=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{2-3x^3}=a=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{2-3x^3}=x^3\\ \sqrt{x^6+x^4+3x^3+2x^2-1}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^6+3x^3-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}$

Thí dụ 42 Giải phương trình

$$x+\sqrt{3-2x^3}=x.\sqrt{x^6+x^4+2x^3+2x^2-2}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{3-2x^3}=a\ge 0$

$\sqrt{x^6+x^4+2x^3+2x^2-2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+x)^2+b^2=x^6+x^4+2x^2+1$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2-2x^2b-(x^2+1)(x^4+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + 1 \\ b = -\dfrac{x^4+1}{x^2+1} < 0 (loai) \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\sqrt{x^6 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2} = x^2 + 1$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{3 - 2x^3} = a = x^3$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{3-2x^3} = x^3 \\ \sqrt{x^6 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2} = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^6 + 2x^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

PT đã cho có 1 nghiệm $x = 1$

Thí dụ 43 Giải phương trình

$$x + \sqrt{4x^3 - 3} = x.\sqrt{\frac{x^6+5}{2} + x^4 - 2x^3 + 2x^2}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{4x^3 - 3} = a \ge 0$

$$\sqrt{\frac{x^6+5}{2} + x^4 - 2x^3 + 2x^2} = b \ge 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$$a^2 + 2b^2 = x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 2 (*)$$

Pt đã cho trở thành:

$$a = xb - x (**)$$

Thay a vào (*) ta được

$$(xb + x)^2 + 2b^2 = x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)b^2 - 2x^2 b - (x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x^2 + 1 \\ b = -\dfrac{x^4 + x^2 + 2}{x^2 + 2} < 0 (loai) \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{x^6+5}{2} + x^4 - 2x^3 + 2x^2} = b = x^2 + 1$$

Thay vào (**) được:

$$\sqrt{4x^3 - 3} = a \ge 0$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{4x^3 - 3} = x^3 \\ \sqrt{\dfrac{x^6+5}{2} + x^4 - 2x^3 + 2x^2} = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^6 - 4x^3 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x = 1; x = \sqrt[3]{3}$

Thí dụ 44 Giải phương trình

$$x + \sqrt{\frac{8}{3}x^3 - 1} = x.\sqrt{\frac{3x^6+5}{2} + x^4 - 4x^3 + 2x^2}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{\frac{8}{3}x^3-1}=a\ge 0$

$\sqrt{\frac{3x^6+5}{2}+x^4-4x^3+2x^2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$3a^2+2b^2=3x^6+2x^4+4x^2+2(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$3(xb+x)^2+2b^2=3x^6+2x^4+4x^2+2$

$\Leftrightarrow (3x^2+2)b^2-6x^2b-(x^2+1)(3x^4-x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=-\frac{3x^4-x^2+2}{3x^2+2}<0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{\frac{3x^6+5}{2}+x^4-4x^3+2x^2}=b=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{\frac{8}{3}x^3-1}=a\ge 0$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{\frac{8}{3}x^3-1}=x^3 \\ \sqrt{\frac{3x^6+5}{2}+x^4-4x^3+2x^2}=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 3x^6-8x^3+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}}$

Thí dụ 45 Giải phương trình

$x+\sqrt{3x^3-1}=x.\sqrt{\frac{3x^6-9x^3+5}{2}+x^4+2x^2}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{3x^3-1}=a\ge 0$

$\sqrt{\frac{3x^6-9x^3+5}{2}+x^4+2x^2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$3a^2+2b^2=3x^6+2x^4+4x^2+2(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=xb-x(**)$

Thay a vào (*) ta được

$3(xb+x)^2+2b^2=3x^6+2x^4+4x^2+2$

$\Leftrightarrow (3x^2+2)b^2-6x^2b-(x^2+1)(3x^4-x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x^2+1 \\ b=-\dfrac{3x^4-x^2+2}{3x^2+2}<0(loai) \end{array}\right.$

Suy ra

$\sqrt{\dfrac{3x^6-9x^3+5}{2}+x^4+2x^2}=b=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt{3x^3-1}=a\geq 0$

Suy ra

$\begin{cases} \sqrt{3x^3-1}=x^3 \\ \sqrt{\dfrac{3x^6-9x^3+5}{2}+x^4+2x^2}=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^6-3x^3+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

Thí dụ 46 Giải phương trình

$1+\sqrt[3]{5x^3-3}=\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2+4}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt[3]{5x^3-3}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2+4}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(b-1)^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(1)$

$\Leftrightarrow (b-x^2-1)(x^4+x^2b+b^2-b+2)=0$

$\Leftrightarrow b=x^2+1$

$(x^4+x^2b+b^2-b+2>0,\forall x,b)$

Cách khác giải (1):

$(b-1)^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(1)$

$\Leftrightarrow b^3-2b^2+3b-1=(x^2+1)^3-2(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1$

$\Leftrightarrow f(b)=f(x^2+1)\Leftrightarrow b=x^2+1$

Vì

$f(t)=t^3-2t^2+3t-1$

$f'(t)=3t^2-4t+3>0$

f(t) là hàm đồng biến

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2+4}=b=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt[3]{5x^3-3}=a=x^3$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt[3]{5x^3-3}=x^3\\ \sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2+4}=x^2+1\end{cases} \Leftrightarrow x^6-5x^3+3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}}$

Thí dụ 47 Giải phương trình

$1+\sqrt[3]{5x^3+3}=\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2-2}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt[3]{5x^3+3}=a$

$\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2-2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(b-1)^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(1)$

$\Leftrightarrow(b-x^2-1)(x^4+x^2b+b^2-b+2)=0$

$\Leftrightarrow b=x^2+1$

$(x^4+x^2b+b^2-b+2>0,\forall x,b)$

Cách khác giải (1):

$(b-1)^3+b^2=x^6+x^4+2x^2+1(1)$

$\Leftrightarrow b^3-2b^2+3b-1=(x^2+1)^3-2(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1$

$\Leftrightarrow f(b)=f(x^2+1)\Leftrightarrow b=x^2+1$

Vì

$f(t)=t^3-2t^2+3t-1$

$f'(t)=3t^2-4t+3>0$

f(t) là hàm đồng biến

Suy ra

$\sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2-2}=b=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt[3]{5x^3+3}=a=x^3$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt[3]{5x^3+3}=x^3\\ \sqrt{x^6+x^4-5x^3+2x^2-2}=x^2+1\end{cases} \Leftrightarrow x^6-5x^3-3=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}}$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}}$

Thí dụ 48 Giải phương trình

$1+\sqrt[3]{4x^3-3}=\sqrt{\dfrac{x^6+5}{2}+x^4-2x^3+2x^2}$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt[3]{4x^3-3}=a$

$$\sqrt{\frac{x^6+5}{2}+x^4-2x^3+2x^2}=b\geq 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+2b^2=x^6+2x^4+4x^2+2(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(b-1)^3+2b^2=x^6+2x^4+4x^2+2(1)$

$\Leftrightarrow(b-x^2-1)(x^4+x^2b+b^2+x^2+3)=0$

$\Leftrightarrow b=x^2+1$

$(x^4+x^2b+b^2+x^2+3>0,\forall x,b)$

Cách khác giải (1):

$(b-1)^3+2b^2=x^6+2x^4+4x^2+2(1)$

$\Leftrightarrow b^3-b^2+3b-1=(x^2+1)^3-(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1$

$\Leftrightarrow f(b)=f(x^2+1)\Leftrightarrow b=x^2+1$

Vì

$f(t)=t^3-t^2+3t-1$

$f'(t)=3t^2-2t+3>0$

f(t) là hàm đồng biến

Suy ra

$$\sqrt{\frac{x^6+5}{2}+x^4-2x^3+2x^2}=b=x^2+1$$

Thay vào (**) được:

$\sqrt[3]{4x^3-3}=a=x^3$

Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt[3]{4x^3-3}=x^3\\ \sqrt{\frac{x^6+5}{2}+x^4-2x^3+2x^2}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow x^6-4x^3+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{3};x=1$

Thí dụ 49 Giải phương trình

$$1+\sqrt[3]{6x^3-8}=\sqrt{\frac{x^6+11}{3}+x^4-2x^3+2x^2}$$

Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt[3]{6x^3-8}=a$

$$\sqrt{\frac{x^6+11}{3}+x^4-2x^3+2x^2}=b\geq 0$$

Suy ra mối liên hệ:

$a^3+3b^2=x^6+3x^4+6x^2+3(*)$

Pt đã cho trở thành:

$a=b-1(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(b-1)^3+3b^2=x^6+3x^4+6x^2+3(1)$

$\Leftrightarrow (b-x^2-1)(x^4+x^2b+2x^2+b^2+b+4)=0$

$\Leftrightarrow b=x^2+1$

$(x^4+x^2b+2x^2+b^2+b+4>0.\forall x,b)$

Cách khác giải (1):

$(b-1)^3+3b^2=x^6+3x^4+6x^2+3(1)$

$\Leftrightarrow b^3+3b-1=(x^2+1)^3+3(x^2+1)-1$

$\Leftrightarrow f(b)=f(x^2+1)\Leftrightarrow b=x^2+1$

Vì

$f(t)=t^3+3t-1$

$f'(t)=3t^2+3>0$

f(t) là hàm đồng biến

Suy ra

$\sqrt{\frac{x^6+11}{3}+x^4-2x^3+2x^2}=b=x^2+1$

Thay vào (**) được:

$\sqrt[3]{4x^3-3}=a=x^3$

Suy ra

$\begin{cases}\sqrt[3]{6x^3-8}=x^3\\ \sqrt{\frac{x^6+11}{3}+x^4-2x^3+2x^2}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow x^6-6x^3+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{2}\\ x=\sqrt[3]{4}\end{array}\right.$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{2};x=\sqrt[3]{4}$

Thí dụ 50 Giải hệ phương trình

$\begin{cases}\sqrt{3-4xy}+y.\sqrt[3]{x^2+4y^2+5}=x(1)\\ \frac{4-4y^2}{2}=\frac{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}{x^4+2x^2+2}(2)\end{cases}$

Tác giả:Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn tạo PT.

Chọn dạng $\sqrt{m}+y\sqrt[3]{n}=p$

Chọn các căn sau khi biến đổi: $\sqrt{m}=x-2y;\sqrt[3]{n}=2;\ p=x$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^3=x^2+4y^2-4xy+8(*)$

Pt cần tạo trở thành:

$a=x-yb(**)$

Thử giải hệ PT gồm(*) và (**) ta thấy cần chọn để có đk xy và b dương thì sẽ loại bỏ được trường hợp phức tạp nên có thể chọn: $m=3xy-4$

Từ(*) suy ra: $n=x^2+4y^2+5$

Việc chọn n hay m trước ta phải linh động

Hướng dẫn.

Đặt $xy\le\frac{3}{4}$

Đặt $\sqrt{3-4xy}=a\ge 0$

$\sqrt[3]{x^2+4y^2+5}=b>0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^3=x^2+4y^2-4xy+8(*)$

Pt (1)đã cho trở thành:

$a=x-yb(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(x-yb)^2+b^3=x^2+4y^2-4xy+8$

$\Leftrightarrow b^3-8-2xyb+4xy+y^2b^2-4y^2=0$

$\Leftrightarrow (b-2)(b^2+2b+4-2xy+y^2b+2y^2)=0$

$\Leftrightarrow b=2$

$xy\le\frac{3}{4};b>0\rightarrow b^2+2b+(4-2xy)+y^2b+2y^2>0$

$b=2\rightarrow a=x-2y$

Ta có:

$\begin{cases}\sqrt{3-4xy}=x-2y\\ \sqrt[3]{x^2+4y^2+5}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y\ge 0\\ x^2+4y^2=3\end{cases}\rightarrow 4y^2=3-x^2$

Thay vào PT(2) có

$\frac{x^2+1}{2}=\frac{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}{x^4+2x^2+2}$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^4+2x^2+2)=(2x^2+2x+2)\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^3+(x^2+1)=(2x^2+2x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\Leftrightarrow f(x^2+1)=f(\sqrt{2x^2+2x+1})$

$f(t)=t^3+t\ \ f'(t)=3t^2+1>0$

Suy ra f(t) đồng biến nên

$f(x^2+1)=f(\sqrt{2x^2+2x+1})$

$\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{2x^2+2x+1}\Leftrightarrow x(x^3-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{2}\end{array}\right.$

Với $x=0\Rightarrow y^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Đối chiếu các đk $xy\le\frac{3}{4};x-2y\ge 0$ **ta lấy** $(x=0;y=-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Với $x=\sqrt[3]{2}\Rightarrow y^2=\frac{3-\sqrt[3]{4}}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt[3]{4}}}{2}$

Đối chiếu các đk $xy\le\frac{3}{4};x-2y\ge 0$ **ta lấy** $(x=\sqrt[3]{2};y=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt[3]{4}}}{2})$

Hệ PT đã cho có 3 cặp nghiệm $(x=0;y=-\frac{\sqrt{3}}{2})$; $(x=\sqrt[3]{2};y=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt[3]{4}}}{2})$

Thí dụ 51 **Giải hệ phương trình**

$\begin{cases}\sqrt{5+4xy}=y.\sqrt[3]{x^2+4y^2+3}+x(1)\\ 2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}}+\sqrt{8x^2+3x+4}=16-8y^2(2)\end{cases}$

Tác giả:Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

Đặt $xy \ge \frac{-5}{4}$

Đặt $\sqrt{5+4xy} = a \ge 0$

$\sqrt[3]{x^2+4y^2+3} = b > 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^3 = x^2+4y^2+4xy+8(*)$

Pt (1)đã cho trở thành:

$a = x+yb(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(x+yb)^2+b^3 = x^2+4y^2+4xy+8$

$\Leftrightarrow b^3-8+2xyb-4xy+y^2b^2-4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (b-2)(b^2+2b+4+2xy+y^2b+2y^2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 2$

$xy \ge \frac{-5}{4}; b > 0 \to b^2+2b+(4+2xy)+y^2b+2y^2 > 0$

$b = 2 \to a = x+2y$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{5+4xy} = x+2y \\ \sqrt[3]{x^2+4y^2+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y \ge 0 \\ x^2+4y^2 = 5 \end{cases} \to 4y^2 = 5-x^2$$

Thay vào PT(2) có

$$2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}} + \sqrt{8x^2+3x+4} = 2x^2+6$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}} + (\sqrt{8x^2+3x+4}-2x^2-2) = 4$$

Với $\sqrt{8x^2+3x+4} > 2(x^2+1)$

$$\to 2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}} + (\sqrt{8x^2+3x+4}-2x^2-2) > 2^2+0 = 4$$

Với $\sqrt{8x^2+3x+4} < 2(x^2+1)$

$$\to 2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}} + (\sqrt{8x^2+3x+4}-2x^2-2) < 2^2+0 = 4$$

Với $\sqrt{8x^2+3x+4} = 2(x^2+1)$

$$\to 2^{\frac{\sqrt{8x^2+3x+4}}{x^2+1}} + (\sqrt{8x^2+3x+4}-2x^2-2) = 2^2+0 = 4$$

$$\sqrt{8x^2+3x+4} = 2(x^2+1) \Leftrightarrow x(4x^3-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{array}\right.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Đối chiếu các đk $xy \ge \frac{-5}{4}; x+2y \ge 0$ **ta lấy** $(x = 0; y = \frac{\sqrt{5}}{2})$

Với $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \Rightarrow y^2 = \frac{5-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}}{2}$

Đối chiếu các đk $xy \ge \frac{-5}{4}; x+2y \ge 0$ **ta lấy** $(x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; y=\frac{\sqrt{5-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}}{2})$

Hệ PT đã cho có 2 cặp nghiệm $(x=0; y=\frac{\sqrt{5}}{2})\ ;(x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; y=\frac{\sqrt{5-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}}{2})$

Thí dụ 52 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+2xy+y^2+3}=x.\sqrt{2xy+1}+y(1)\\ 2^{x^2-\sqrt{11x^2-6x+4}}=\dfrac{-2x^2y+11x^2+2xy+2}{4(x^4+4x^2+5)}(2)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong GVTHPT Tiên Du 1, Bắc Ninh

Hướng dẫn.

ĐK: $xy \ge \frac{-1}{2}$

Đặt $\sqrt{4x^2+2xy+y^2+3}=a\ge\sqrt{3}$

$\sqrt{2xy+1}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=4x^2+y^2+4xy+4(*)$

Pt (1)đã cho trở thành:

$a=xb+y(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+y)^2+b^2=4x^2+y^2+4xy+4(*)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2+2xyb-2(2x^2+2xy+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2\\ b=\dfrac{-(2x^2+2xy+2)}{x^2+1}<0(loai)\end{array}\right.$$

$b=2\to a=2x+y$

Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{2xy+1}=2\\ \sqrt{4x^2+2xy+y^2+3}=2x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y\ge 0\\ 2xy=3\end{cases}$$

Thay vào PT(2) có

$$2^{x^2-\sqrt{11x^2-6x+4}}=\frac{11x^2-6x+5}{4(x^4+4x^2+5)}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+(x^2+2)^2\right)2^{x^2+2}=\left(1+\left(\sqrt{11x^2-6x+4}\right)^2\right)2^{\sqrt{11x^2-6x+4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+2)=f(\sqrt{11x^2-6x+4})$$

$$\Leftrightarrow x^2+2=\sqrt{11x^2-6x+4}\Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\to không có y\\ x=-3\to y=-\dfrac{1}{2}(loai vi 2x+y\ge 0)\\ x=1\to y=\dfrac{3}{2}\\ x=2\to y=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

Cách khác:

$$2^{x^2-\sqrt{11x^2-6x+4}}=\frac{11x^2-6x+5}{4(x^4+4x^2+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+2-\sqrt{11x^2-6x+4}}-1+1-\frac{11x^2-6x+5}{x^4+4x^2+5}=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{(x^2+3x)(x^2-3x+2)}{x^2+2+\sqrt{11x^2-6x+4}}}-1+\frac{(x^2+3x)(x^2-3x+2)}{x^4+4x^2+5}=0$$

Xét 3 trường hợp................

Chú ý: Muốn có hệ đơn giản ta có thể tạo ra hệ PT gồm PT thứ nhất đặt ẩn phụ không hoàn toàn kiểu của tác giả và PT thứ 2 đơn giản,quen thuộc chẳng hạn:

Thí dụ 53 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+2xy+2y^2+3}=x.\sqrt{2xy+1-y^2}+y(1)\\ 2^x+3^{2xy-y^2-x}=2x+3(2)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong (ToánB K35 ĐHSP.TN)

Hướng dẫn.

ĐK $2xy\ge -1+y^2\to 2xy\ge -1$

Đặt $\sqrt{4x^2+2xy+2y^2+3}=a\ge\sqrt{3}$

$\sqrt{2xy+1-y^2}=b\ge 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=4x^2+y^2+4xy+4(*)$

Pt (1)đã cho trở thành:

$a=xb+y(**)$

Thay a vào (*) ta được

$(xb+y)^2+b^2=4x^2+y^2+4xy+4(*)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)b^2+2xyb-2(2x^2+2xy+2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2\\ b=\dfrac{-(2x^2+2xy+2)}{x^2+1}<0(loai)\end{array}\right.$$

$b=2\to a=2x+y$

Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{2xy+1-y^2}=2\\ \sqrt{4x^2+2xy+2y^2+3}=2x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y\ge 0\\ y^2-2xy+3=0\end{cases}$$

Thay vào PT(2) có

$2^x+3^{3-x}=2x+3$

$\Leftrightarrow 2^x+3^{3-x}-2x-3=0$

$f(t)=2^x+3^{3-x}-2x-3$

$f'(t)=2^x\ln 2-3^{3-x}\ln 3-2$

$f''(t)=2^x\ln^2 2+3^{3-x}\ln^2 3>0$

Suy ra f'(t) đồng biến nên f'(t) có tối đa 1 nghiệm suy ra f(t) có tối đa 2 khoảng đơn điệu Vì thế f(t) có tối đa 2 nghiệm. suy ra x=2,x=3 là tất cả các nghiệm của f(t)

Với x=2 có: $y^2-4y+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=3\end{array}\right.$

Với x=3 có: $y^2-6y+3=0\Leftrightarrow y=3\pm\sqrt{6}$

Thí dụ 54 **Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases}\sqrt{9x^2-8xy+3y^2+6}=(x-y)\sqrt{y^2-4xy+3}+y(*)\\ \dfrac{3x+4xy-y^2-3}{x^2+3}=\dfrac{2x^2+8xy-2y^2+3x-3}{4+\sqrt{2x^2+3x+1}}(**)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong

Hướng dẫn.

Đk $y^2-4xy+3\geq 0; 9x^2-8xy+3y^2+6\geq 0$

Đặt $\sqrt{9x^2-8xy+3y^2+6}=a\geq 0$

$\sqrt{y^2-4xy+3}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=9x^2-12xy+4y^2+9(1)$

Pt (*)đã cho trở thành:

$a=(x-y)b+y$

Thay a vào (1) ta được

$((x-y)b+y)^2+b^2=9x^2-12xy+4y^2+9$

$\Leftrightarrow ((x-y)^2+1)b^2+2y(x-y)b-3(3x^3-4xy+y^2+3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=3\\ b=\dfrac{-(3x^2-4xy+y^2+3)}{(x-y)^2+1}<0\end{array}\right.$$

vì có $y^2-4xy+3\geq 0; 3x^2\geq 0$ **và** $y^2-4xy+3; 3x^2$ **không đồng thời bằng 0**

với b=3 suy ra $a=3x-2y$

Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{3y^2-4xy+3y^2+6}=3x-2y\\ \sqrt{y^2-4xy+3}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y\geq 0\\ y^2-4xy=6\end{cases}$$

Thay vào PT(**) có

$$\frac{3x-9}{x^2+3}=\frac{2x^2+3x-15}{4+\sqrt{2x^2+3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-9}{x^2+3}=\frac{(4+\sqrt{2x^2+3x+1})(\sqrt{2x^2+3x+1}-4)}{4+\sqrt{2x^2+3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-9}{x^2+3}=\sqrt{2x^2+3x+1}-4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1-(x^2+1+2)\sqrt{2x^2+3x+1}+2(x^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+3x+1}=x^2+1\\ \sqrt{2x^2+3x+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x(x^3-3)=0\\ 2x^2+3x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{3}\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$$

Với $x=0$ **có:** $y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}$

Với $x=\sqrt[3]{3}$ **có:** $y^2-4\sqrt[3]{3}y-6\Leftrightarrow y=-2\sqrt[3]{3}\pm\sqrt{6+4\sqrt[3]{9}}$

Với $x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}$ **có:** $y^2-(-3+\sqrt{33})y-6\Leftrightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{33}\pm\sqrt{24+(3-\sqrt{33})^2}}{2}$

Với $x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}$ **có:** $y^2+(3+\sqrt{33})y-6 \Leftrightarrow y=\dfrac{-3-\sqrt{33}\pm\sqrt{24+\left(3+\sqrt{33}\right)^2}}{2}$

Kiểm tra đk: $3x-2y\geq 0$ **ta lấy 4 cặp nghiệm:**

$x=0\,;y=-\sqrt{6}$

$x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}\,;y=\dfrac{-3+\sqrt{33}-\sqrt{24+\left(3-\sqrt{33}\right)^2}}{2}$

$x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\quad;y=\dfrac{-3-\sqrt{33}\pm\sqrt{24+\left(3+\sqrt{33}\right)^2}}{2}$

Thí dụ 55 **Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases}\sqrt{x^2y^2-x^2y+x^2+y^2+y+2}=x.\sqrt{x^2y-x^2+y-1}-x(*)\\ 2^y+3y=y^2+2\sqrt{x^2y-x^2+y-1}(**)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong

Hướng dẫn.

Đk $\rightarrow x^2y-x^2+y\geq 1$

Đặt $\sqrt{x^2y^2-x^2y+x^2+y^2+y+2}=a\geq 0$

$\sqrt{x^2y-x^2+y-1}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^2y^2+y^2+2y+1(1)$

Pt (*)đã cho trở thành:

$a=xb-x$

Thay a vào (1) ta được

$(xb-x)^2+b^2=x^2y^2+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)b^2-2x^2b-(y+1)(x^2y-x^2+y+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=y+1\\ b=\dfrac{-(x^2y-x^2+y+1)}{x^2+1}<0(l)\end{array}\right.$$

Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2y^2-x^2y+x^2+y^2+y+2}=xy\\ \sqrt{x^2y-x^2+y-1}=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy\geq 0\\ y\geq -1\\ y\neq 1\\ x^2=\dfrac{y^2+y+2}{y-1}\end{cases}$$

Thay $\sqrt{x^2y-x^2+y-1}=y+1$ **vào PT(**) có**

$2^y-y^2+y-2=0$

$f(y)=2^y-y^2+y-2$

$f'(y)=2^y\ln 2-2y+1$

$f''(y)=2^y\ln^2 2-2\;\; f''(y)=2^y\ln^2 2-2=0\Leftrightarrow y=\ln\dfrac{2}{\ln^2 2}$

suy ra f'(y) có tối đa 2 khoảng đơn điệu suy ra f'(y) có tối đa 2 nghiệm suy ra f(y) có tối đa 3 khoảng đơn điệu nên f(t) có tối đa 3 nghiệm

suy ra y=1;y=2;y=3 là tất cả các nghiệm của f(y)

ta loại y=1

Với $y=2$ **có:** $x^2=6\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

Với $y=3$ **có:** $x^2=7\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu các điều kiện suy ra hệ Pt đã cho có 2 cặp nghiệm:

$(x = 2\sqrt{2}; y = 2), (x = \sqrt{7}; y = 3)$

Thí dụ 56 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{(y+1)\sqrt{xy^2+2y} - x + 2}{1 + \sqrt{x^2y^2 - xy^2 + 2xy + x^2 - 2y + 1}} = 1(*) \\ 3^{\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}} + \dfrac{4}{2^{\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}}} = \dfrac{5(xy^2+2y+1)}{\sqrt{2xy^2+2x+2y+1}} (**) \end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong (làng Bất Lự,Bắc Ninh)

Hướng dẫn.

Đk $\rightarrow xy^2 + 2y \geq 0$

Đặt $\sqrt{x^2y^2 - xy^2 + 2xy + x^2 - 2y + 1} = a \geq 0$

$\sqrt{xy^2 + 2y} = b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + b^2 = x^2y^2 + 2xy + 1 + x^2 (1)$

Pt (*)đã cho trở thành:

$$\frac{(y+1)b - x + 2}{1 + a} = 1 \Leftrightarrow a = (y+1)b - x + 1$$

Thay a vào (1) ta được

$((y+1)y - x + 1)^2 + b^2 = x^2y^2 + 2xy + 1 + x^2$

$\Leftrightarrow ((y+1)^2 + 1)b^2 - 2(x-1)(y+1)b - x(xy^2 + 2y + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = x \rightarrow a = xy + 1 \\ b = \dfrac{-(xy^2+2y+2)}{(y+1)^2+1} < 0(l) \end{array} \right.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2y^2 - xy^2 + 2xy + x^2 - 2y + 1} = xy + 1 \\ \sqrt{xy^2 + 2y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq -1 \\ x \geq 0 \\ xy^2 + 2y = x^2 \end{cases}$$

Thay $xy^2 + 2y = x^2$ **vào PT(**) có**

$$3^{\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}} + 2^{2-\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}} - \frac{5(x^2+1)}{\sqrt{2x^2+2x+1}} = 0$$

Đặt $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}} = t \geq 0$

Có:

$3^t + 2^{2-t} - 5t = 0$

$f(t) = 3^t + 2^{2-t} - 5t$

$f'(t) = 3^t \ln 3 - 2^{2-t} \ln 2 - 5$

$f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 2^{2-t} \ln^2 2$

suy ra f'(t) đồng biến, f'(t) có tối đa 1 nghiệm suy ra f(t) có tối đa 2 khoảng đơn điệu nên f(t) có tối đa 2 nghiệm

suy ra t=1;t=2 là tất cả các nghiệm của f(t)

Với $t=1$ **có:** $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}=1 \Leftrightarrow x(x^3-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to y=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \to \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}(loaivixy \geq -1) \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Với $t=1$ **có:**

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}=2 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \to \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1-2\sqrt{7}}{3}(loaivixy \geq -1) \\ y=\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3} \end{array}\right. \\ x=-1<0(loai) \end{array}\right.$$

hệ Pt đã cho có 3 cặp nghiệm (x;y): $(0;0),(\sqrt[3]{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}),(3;\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3})$

Sau đây tác giả nêu vài thí dụ hệ PT dùng 2 phương pháp đặt ẩn phụ đều của tác giả nghĩ ra(phương pháp sau tác giả dựa vào phép thế Ơ-le trong tính tích phân)

Muốn tìm hiểu rõ phương pháp đặt ẩn phụ kiểu phép thế Ơ-le các bạn có thể tìm ở tạp chí:

Tạp chí Toán học tuổi trẻ số 468 Tháng 6-2016

Tác giả:Vũ Hồng Phong (làng Bất Lự,Hoàn Sơn;Tiên Du;Bắc Ninh)

Thí dụ 57 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x^4+2x^2+y^2-y+1}=\dfrac{x^2}{y}\sqrt{y-x^4}+1(*) \\ \dfrac{16y-16y^2}{x}+(8x^2-1)\sqrt{4x^2+1}=\dfrac{15}{16x+9}(**) \end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong (GVTHPT Tiên Du 1,Bắc Ninh)

Hướng dẫn.

Đk $\to y-x^4 \geq 0 \to y \geq x^4 \geq 0 \to y>0(đk: y \neq 0)$

Đặt $\sqrt{2x^4+2x^2+y^2-y+1}=a \geq 0$

$\sqrt{y-x^4}=b \geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2+b^2=x^4+y^2+2x^2+1(1)$

Pt (*)đã cho trở thành:

$a=\dfrac{x^2}{y}b+1$

Thay a vào (1) ta được

$$\left(\frac{x^2}{y}b+1\right)^2+b^2=x^4+y^2+2x^2+1(1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{y^2}+1\right)b^2-\frac{2x^2}{y}b-(x^4+y^2+2x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{y^2}+1\right)b^2-\frac{2x^2}{y}b-(x^4+y^2+2x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{x^4}{y^2}+1\right)b^2-2x^2b-y(x^4+y^2+2x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = y \rightarrow a = x^2 + 1 \\ b = \dfrac{-(x^4 + y^2 + 2x^2)}{(\frac{x^4}{y^2} + 1)y} < 0(l) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^4 + 2x^2 + y^2 - y + 1} = x^2 + 1 \\ \sqrt{y - x^4} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y - y^2 = x^4 \end{cases}$$

Thay $y - y^2 = x^4$ vào PT(**) có

$$16x^3 + (8x^2 - 1)\sqrt{4x^2 + 1} = \frac{15}{16x + 9}$$ Điều kiện $x \neq \frac{-9}{16}$

$$\Leftrightarrow 32x^3 + (16x^2 - 2)\sqrt{4x^2 + 1} = \frac{30}{16x + 9} (***)$$

Ta có

$$(2x + \sqrt{4x^2 + 1})^3 = 8x^3 + 12x^2\sqrt{4x^2 + 1}$$

$$+ 6x(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}$$

$$= 32x^3 + 6x + (16x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}$$

Suy ra

$$VT(***) = 32x^3 + 6x + (16x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1} - 3(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

$$= (2x + \sqrt{4x^2 + 1})^3 - 3(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

Đặt $2x + \sqrt{4x^2 + 1} = t \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = t - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2x \geq 0 \\ 4x^2 + 1 = (t - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2x \geq 0 \\ 4tx = t^2 - 1 \end{cases}$ (i)

+ Dễ thấy t = 0 không thoả mãn (i)

+ Xét $t \neq 0$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + t^2}{2t} \geq 0 \\ x = \dfrac{t^2 - 1}{4t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x = \dfrac{t^2 - 1}{4t} \end{cases}$$

Khi này PT(***) trở thành

$$t^3 - 3t = \frac{30}{16.\frac{t^2 - 1}{4t} + 9}$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t = \frac{30t}{4t^2 + 9t - 4}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3 = \frac{30}{4t^2 + 9t - 4}$$ (do $t \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (t^2 - 3)(4t^2 + 9t - 4) = 30$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 + 9t^3 - 16t^2 - 27t - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t + 3)(4t^2 + 5t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \\ 4t^2 + 5t + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình $4t^2 + 5t + 3 = 0$

có $\Delta < 0$ nên nó vô nghiệm

Do $t>0$ nên ta chỉ lấy $t=2$

-Với $t=2$ thay vào (1) ta được $x=\frac{3}{8}$

Vậy PT(***) có 1 nghiệm $x=\frac{3}{8}$

Với $x=\frac{3}{8}$ **có:** $y-y^2=\frac{81}{4096}\Leftrightarrow y=\frac{32\pm\sqrt{943}}{64}$

hệ Pt đã cho có 2 cặp nghiệm (x;y): $\left(\frac{3}{8};\frac{32\pm\sqrt{943}}{64}\right)$

Thí dụ 58 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2-y^2+2x+1}+\sqrt{2x^2+3y^2}=x+2y+1(*)\\ \left(1+\sqrt{\frac{7}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1}\right)^3=\frac{11x^3+10x^2+30y^2}{3}(**)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong (làng Bất Lự,Bắc Ninh)

Hướng dẫn.

Dễ thấy $x+2y+1=0$ **thì**

$(*)\rightarrow\sqrt{2x^2+3y^2}=0\rightarrow x=y=0$ **(không xảy ra)**

$(*)\rightarrow x+2y+1>0$

Đặt $\sqrt{3x^2-y^2+2x+1}=a\geq 0$

$\sqrt{2x^2+3y^2}=b>0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2-b^2=(x+1)^2-(2y)^2$

Pt (*)đã cho trở thành:

$a+b=x+1+2y$

Ta có hệ:

$$\begin{cases}(a-b)(a+b)=(x+1+2y)(x+1-2y)\\ a+b=x+1+2y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=x+1-2y\\ a+b=x+1+2y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=x+1\\ b=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x^2-y^2+2x+1}=x+1\\ \sqrt{2x^2+3y^2}=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ y\geq 0\\ y^2=2x^2\end{cases}$$

Thay $y^2=2x^2$ **vào PT(**) có :**

$$\left(1+\sqrt{\frac{7}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1}\right)^3=\frac{11x^3+70x^2}{3}(***)$$

+Dễ thấy $x=0$ không thoả mãn PT (***)

+ Xét $x\neq 0$

Đặt $\sqrt{\frac{7}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1}=tx-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}tx-1\geq 0\\ \frac{7}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1=t^2x^2-2xt+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}tx-1\geq 0\\ 3t^2x^2-7x^2=6tx+2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}tx-1\geq 0\\ (3t^2-7)x=6t+2\end{cases}(1)\ (\text{do } x\neq 0)$$

Dễ thấy khi $3t^2-7=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

không thoả mãn (1)

Khi $t \neq \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6t+2}{3t^2-7} \\ t.\dfrac{6t+2}{3t^2-7} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6t+2}{3t^2-7} \\ \dfrac{3t^2+2t+7}{3t^2-7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6t+2}{3t^2-7} \\ \left[\begin{array}{l} t < -\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ t > \sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{array}\right. \end{cases} \quad (2)$$

Với cách đặt trên thay vào PT đã cho ta được

$$(1+tx-1)^3 = \frac{11x^3+70x^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow t^3x^3 = \frac{11x+70}{3}.x^2$$

$$\Leftrightarrow 3t^3x = 11x+70$$

$$\Leftrightarrow 3t^3.\frac{6t+2}{3t^2-7} = 11.\frac{6t+2}{3t^2-7} + 70$$

$$\Leftrightarrow 3(6t+2)t^3 = 11(6t+2) + 70(3t^2-7)$$

$$\Leftrightarrow 18t^4 + 6t^3 - 210t^2 - 66t + 468 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(t-3)(t+2)(3t^2+4t-13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \\ 3t^2+4t-13 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \\ t = \dfrac{-2\pm\sqrt{43}}{3} \end{array}\right.$$

đối chiếu điều kiện của t ở (2) ta loại

$$t = \frac{-2+\sqrt{43}}{3}$$

Với t còn lại thay vào (2) ta được

$$x = 1; x = -2; x = \frac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}} \approx -0,775$$

đối chiếu điều kiện $x \geq -1 \rightarrow x = 1; x = \dfrac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}} \approx -0,775$

Với $x = 1 \rightarrow y^2 = 2x^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} < 0(l) \end{array}\right.$

Với $x = \dfrac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{86}}{13+2\sqrt{43}} (y > 0)$

hệ Pt đã cho có 2 cặp nghiệm (x;y):

$(1:\sqrt{2})$; $\left(\dfrac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}}; \dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{86}}{13+2\sqrt{43}}\right)$

Thí dụ 59 **Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2-y^2+6x+9}+\sqrt{4x^2-2y+1}=x+y+2(*)\\ \dfrac{2x^2+y^2+17x+11}{2+\sqrt{2x^2+y^2+17x+11}}=\dfrac{27}{28}x+\dfrac{41}{14}(**)\end{cases}$$

Tác giả:Vũ Hồng Phong (làng Bất Lự,Bắc Ninh)

Hướng dẫn.

Dễ thấy $x+y+2=0$ **thì**

$(*)\to\sqrt{5x^2-y^2+6x+9}=\sqrt{4x^2-2y+1}=x+y+2=0\to....\to 4x^2+2x+5=0(vn)$

(không xảy ra)

$(*)\to x+y+2>0$

Đặt $\sqrt{5x^2-y^2+6x+9}=a\geq 0$

$\sqrt{4x^2-2y+1}=b\geq 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2-b^2=x^2+6x+9-y^2+2y-1=(x+3)^2-(y-1)^2$

Pt (*)đã cho trở thành:

$a+b=x+3+y-1$

Ta có hệ:

$$\begin{cases}(a-b)(a+b)=(x+3+y-1)(x+3-y+1)\\ a+b=x+3+y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=x+3-(y-1)\\ a+b=x+3+y-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=x+3\\ b=y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{5x^2-y^2+6x+9}=x+3\\ \sqrt{4x^2-2y+1}=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ y\geq 1\\ y^2=4x^2\end{cases}$$

Thay $y^2=4x^2$ **vào PT(**) có :**

$$\frac{6x^2+17x+11}{2+\sqrt{(x+1)(6x+11)}}=\frac{27}{28}x+\frac{41}{14}$$

Dễ thấy $x=-1$ không là nghiệm của phương trình

Với $x\neq -1$ đặt

$\sqrt{(x+1)(6x+11)}=(x+1)t\geq 0\ (1)$

$\Rightarrow(x+1)(6x+11)=(x+1)^2t^2$

$\Rightarrow 6x+11=(x+1)t^2$

$\Rightarrow(t^2-6)x=11-t^2\ (2)$

Dễ thấy $t=\pm\sqrt{6}$ không thoả mãn (2)

Với $t\neq\pm\sqrt{6}$ suy ra $x=\dfrac{11-t^2}{t^2-6}\ (3)$

thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{(x+1)(6x+11)}=\frac{5t}{t^2-6}\geq 0$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}t>\sqrt{6}\\ -\sqrt{6}<t\leq 0\end{array}\right.\ (4)$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\left(\dfrac{5t}{t^2-6}\right)^2}{2+\dfrac{5t}{t^2-6}}=\frac{27}{28}\cdot\frac{11-t^2}{t^2-6}+\frac{41}{14}\Leftrightarrow 700t^2=(55t^2-195)(2t^2+5t-12)$$

$\Leftrightarrow 140t^2=(11t^2-39)(2t^2+5t-12)$

$\Leftrightarrow 22t^4 + 55t^3 - 350t^2 - 195t + 468 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(22t^2 + 143t + 156) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \\ t = \dfrac{-143 \pm \sqrt{6721}}{44} \end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện ở (4) ta lấy $t = 3$ và

$t = \dfrac{-143 + \sqrt{6721}}{44}$

Thay các giá trị t vào (3) ta được $x = \dfrac{2}{3}$

và $x = \dfrac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}} = \dfrac{143\sqrt{6721} - 2937}{7777 - 143\sqrt{6721}}$

Với $x = \dfrac{2}{3} \to y^2 = 4x^2 = \dfrac{16}{9}; y \ge 1 \to y = \dfrac{4}{3}$

Với $x = \dfrac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}}; y^2 = 4x^2; y \ge 1 \to y = \dfrac{286\sqrt{6721} - 5874}{7777 - 143\sqrt{6721}}$

hệ Pt đã cho có 2 cặp nghiệm (x;y):

$x = \dfrac{2}{3}; y = \dfrac{4}{3}$

$x = \dfrac{143\sqrt{6721} - 2937}{7777 - 143\sqrt{6721}}; y = \dfrac{286\sqrt{6721} - 5874}{7777 - 143\sqrt{6721}}$

Thí dụ 60 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{4xy + 15} = x.\sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + y^2 + 1}{2}} + y(*) \\ e^{y^2 - 1} - e^{\sqrt{3y^2 - 2y + 1}} = y^4 + 20x^2 + 2y - 75(**) \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Đk: $xy \ge \dfrac{-15}{4}$

Đặt: $\sqrt{4xy + 15} = a \ge 0$

$\sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + y^2 + 1}{2}} = b > 0$

Suy ra mối liên hệ:

$a^2 + 2b^3 = (2x + y)^2 + 16 (1)$

Từ phương trình (*) có:

$a = xb + y$

Thay vào (1) được:

$(xb + y)^2 + 2b^3 = (2x + y)^2 + 16$

$\Leftrightarrow (b-2)(x^2b + 2x^2 + 2b^2 + 4b + 2xy + 8) = 0$

$\Leftrightarrow b = 2$ vì $(x^2b + 2x^2 + 2b^2 + 4b + 2xy + 8 > 0)$

Suy ra

$a = 2x + y$

Ta có :

$$\begin{cases}\sqrt{4xy+15}=2x+y\\ \sqrt[3]{\dfrac{4x^2+y^2+1}{2}}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y\ge 0\\ 4x^2+y^2=15\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{15-y^2}{4}$$

Thay vào(**) được:

$$e^{y^2-1}-e^{\sqrt{3y^2-2y+1}}=y^4-5y^2+2y$$

$$\Leftrightarrow e^{y^2-1}-(y^2-1)^2=e^{\sqrt{3y^2-2y+1}}-(3y^2-2y+1)$$

$$\Leftrightarrow f(y^2-1)=f(\sqrt{3y^2-2y+1})$$

$$f(t)=e^t-t^2$$

$$f'(t)=e^t-2t$$

$$f''(t)=e^t-2$$

$$f''(t)=e^t-2=0\Leftrightarrow x=\ln 2$$

t	Ln2
f''(t)	- 0 +
f'(t)	↘ ↗ 2-ln4>0
f(t)	↗

Như vậy f(t) là hàm đồng biến. suy ra

$$f(y^2-1)=f(\sqrt{3y^2-2y+1})$$

$$\Leftrightarrow y^2-1=\sqrt{3y^2-2y+1}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-1\ge 0\\ y(y-2)(y^2+2y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$$y=2\Rightarrow x^2=\frac{11}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$y=-1-\sqrt{2}\Rightarrow x^2=\frac{12-2\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{12-2\sqrt{2}}}{2}$$

Đối chiếu đk suy ra nghiệm hệ đã cho:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{2};2\right),\left(\frac{\sqrt{12-2\sqrt{2}}}{2};-1-\sqrt{2}\right)$$